ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания предназначены для студентов, выполняющих домашнее задание по теории поля, машиностроительного и приборостроительного факультетов.

На примере задания некоторой скалярной функции и векторной функции рассматриваются свойства скалярных и векторных полей, а также частные случаи. Приводятся теоретические положения и иллюстрируются примерами, дается решение типового варианта домашнего задания.

Для скалярного поля рассматриваются, соответствующие ему поверхности (линии) уровня, векторное поле, порождаемое скалярной функцией, ее градиент; дается способ нахождения работы, произведенной этим вектором.

Для векторного поля приводится способ нахождения векторных линий, дивергенции, ротора векторной функции и вычисления потока через замкнутую поверхность, а также циркуляции по замкнутому контуру.

Данные для решения домашнего задания берутся из таблиц, помещенных в конце методических указаний.

§ 1. Скалярное поле и его градиент

Пусть D область на плоскости или в пространстве. Если в каждой точке M области D ставится в соответствие некоторое число $u(M)$, то в области D задается скалярное поле. Таким образом, скалярное поле определяется с помощью функции $u(M)$. Следующие физические величины – температура, давление, электростатический потенциал – образуют скалярное поле. Если функция $u(M)$ не зависит от времени, то скалярное поле называется стационарным. Значение функции в общем виде может быть записано

$$u = f(x, y, z),$$

где x, y, z – координаты точки пространства, образующей скалярное поле.

Всегда предполагаем, что u имеет непрерывные по всем переменным частные производные. Если эти производные одновременно не обращаются в нуль, то уравнение

$$f(x, y, z) = C \ (const)$$

в трехмерном пространстве определяет некоторую поверхность без особых точек, вдоль которой величина u сохраняет постоянное значение. Такая поверхность называется поверхностью уровня. В случае двухмерного пространства уравнение $f(x,y)=C$ определяет кривую уровня. Через каждую точку пространства проходит одна и только одна поверхность уровня (кривая уровня).

Возьмем на поверхности уровня $U=f(x,y,z)=C$ какую-нибудь точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Производные $f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)$, взятые в точке $M_1(x_1,y_1,z_1)$, являются координатами нормального вектора $\bar{n}$ касательной плоскости к поверхности $f(x,y,z)=C$ в этой точке, а, следовательно, – перпендикуляром к произвольной кривой, расположенной на поверхности уровня и проходящей через данную точку (рис. 1).

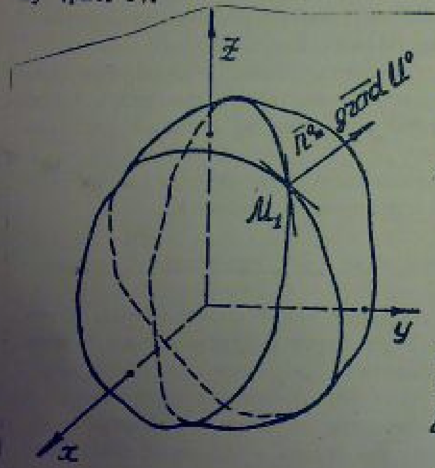

Рис. 1

Этот вектор называется градиентом скалярного поля в точке $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и записывается в виде

$$\overline{grad}\, U|_{M_1} = f'_x(x_1,y_1,z_1)\bar{i} + f'_y(x_1,y_1,z_1)\bar{j} + f'_z(x_1,y_1,z_1)\bar{k}.$$

С другой стороны, частная производная по направлению

$$\bar{l}^0 = \cos(l,x)\bar{i} + \cos(l,y)\bar{j} + \cos(l,z)\bar{k}$$

для функции $U=f(x,y,z)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$, как известно, выражается формулой

$$\frac{\partial U}{\partial l} = f'_x(x,y,z)\cos(l,x) + f'_y(x,y,z)\cos(l,y) + f'_z(x,y,z)\cos(l,z) =$$

$$= [f'_x(x,y,z)\bar{i} + f'_y(x,y,z)\bar{j} + f'_z(x,y,z)\bar{k}]\cdot\bar{l}^0 = \overline{grad}\, U\cdot\bar{l}^0 = \overline{grad}_{l^0} U,$$ так как $|\bar{l}^0| = 1$.

Введем единичный нормальный вектор

$$\bar{n}^{0} = \cos(n,x)\bar{i} + \cos(n,y)\bar{j} + \cos(n,z)\bar{k}, \; |\bar{n}^{0}| = 1.$$

Рассмотрим частную производную для функции $u = f(x,y,z)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ по направлению нормали

$$\frac{\partial u}{\partial n^{0}} = \overline{grad}\, u \cdot \bar{n}^{0},$$

что дает скорость изменения функции $u = f(x,y,z)$ по направлению градиента, так как $\bar{n}^{0} \uparrow\uparrow \overline{grad}\, u$, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial n^{0}} = |\overline{grad}\, u| \cdot 1 \cdot \cos 0.$$

Значение частной производной функции $u = f(x,y,z)$ или скорость ее изменения по направлению градиента будет иметь наибольшее значение, равное модулю градиента.

Определение градиента функции $u = f(x,y,z)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$. Градиентом функции $u = f(x,y,z)$ называется вектор, проекции которого есть частные производные этой функции, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону увеличения $u = f(x,y,z)$, и по величине равный производной по этому направлению.

Поле, образованное вектором $\overline{grad}\, u$, называется потенциальным полем, а скалярная функция $u = f(x,y,z)$ – потенциалом поля.

Так как рассматриваемая функция $u = f(x,y,z)$ обладает непрерывными частными производными, то полный дифференциал функции $u = f(x,y,z)$ имеет вид

$$du = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz.$$

Работа вектора $\overline{grad}\, u$ по кусочно-гладкой кривой L определяется формулой

$$A = \int_L \overline{grad}\, u \cdot d\bar{l},$$

где $d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ – направленный элемент дуги кривой, т.е. вектор, имеющий направление касательной к линии, а по модулю этот вектор равен дифференциалу длины дуги кривой L (рис. 2)

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

cos 135°

где

$$dx = \cos(l,x)dl; \; dy = \cos(l,y)dl; \; dz = \cos(l,z)dl.$$

Дуга кривой L определяется начальной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конечной точкой $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Так как

$$\overline{grad}\, u \cdot d\bar{l} = |\overline{grad}\, u|\,|d\bar{l}|\cos\varphi = |\overline{grad}\, u|\cos\varphi\, dl = grad_l\, u\, dl,$$

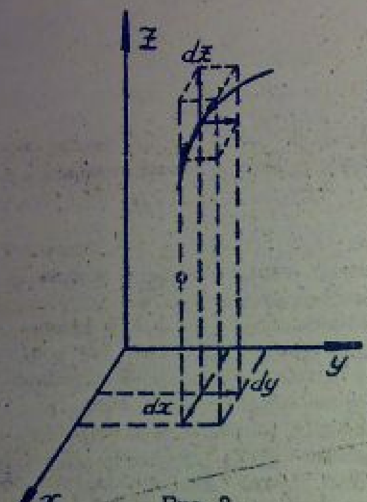

Рис. 2

то в результате получим

$$A=\int\limits_L \overline{grad}\ u\,d\bar{l}=\int\limits_L grad_l\, u\,dl,$$

что соответствует

$$A=\int\limits_L \overline{grad\,u}\cdot d\bar{l}=\int\limits_L f_x'(x,y,z)dx+$$

$$+f_y'(x,y,z)dy+f_z'(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_L du=\int\limits_{M_1M_2} d\,u=u(M_2)-u(M_1).$$

Пусть частные производные функции $f_x'(x,y,z)$, $f_y'(x,y,z)$, $f_z'(x,y,z)$ непрерывны в односвязной области D, содержащей кривую L. Тогда криволинейный интеграл, взятый на дуге M_1M_2 кривой L, не зависит от линии интегрирования только в том случае, если его подынтегральное выражение есть полный дифференциал.

Задача № 1. Пусть задана скалярная функция $U=x^2+y^2-z$.

а) В каждой точке трехмерного евклидова пространства эта функция будет иметь конечное значение. Множество этих значений образует скалярное поле. Найдем поверхность уровня, для этого приравняем функцию константе $U=C$ или $x^2+y^2=C+z$. Это уравнение характеризует параболоид вращения. Пусть C принимает числовые значения $-1, 0, 1$. Тогда (рис. 3)

1). $C=-1,\quad x^2+y^2=z-1;$

2) $C=0,\quad x^2+y^2=z;$

3) $C=1,\quad x^2+y^2=z+1.$

б) Найти вектор $\overline{grad\,u}$, вычислить его значение в точках $M_1(0,0,0)$, $M_2(1,0,1)$, $M_3(0,1,1)$ и построить найденные векторы при условии, что поверхность уровня задана уравнением $x^2+y^2=z$

$$\overline{grad}\, u = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - \bar{k},$$

откуда $|\overline{grad}\, u| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$, $\overline{grad}\, u|_{M_1} = -\bar{k}$,

$$\overline{grad}\, u|_{M_2} = 2\bar{i} - \bar{k}, \quad \overline{grad}\, u|_{M_3} = 2\bar{j} - \bar{k}.$$

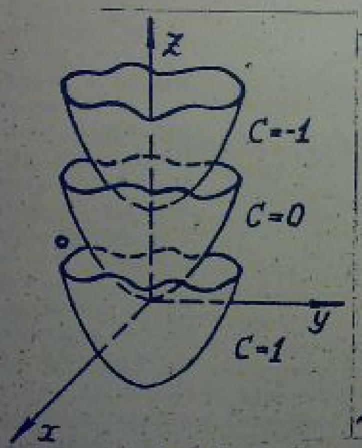

Рис. 3

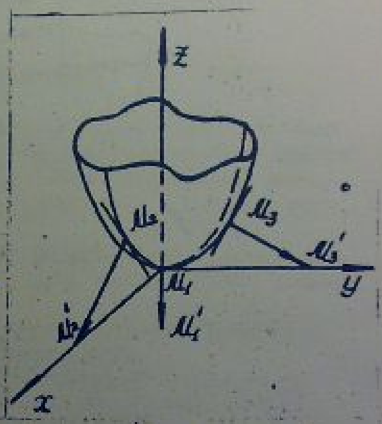

Рис. 4

На рис. 4 $\overline{grad}\, u|_{M_1} = \overline{M_1M_1'}$,

$$\overline{grad}\, u|_{M_2} = \overline{M_2M_2'}, \quad \overline{grad}\, u|_{M_3} = \overline{M_3M_3'}.$$

в) Вычислить работу вектора $\overline{grad}\, u$ по произвольной кривой, соединяющей точки $M_4(1,0,0)$ и $M_5(0,0,1)$. Тогда

$$A = \int_L du = (x^2+y^2-z)\Big|_{(1,0,0)}^{(0,0,1)} = -2,$$

т.е. разность значений функции $u = f(x,y,z) = x^2+y^2-z$ будет отличаться от нуля, так как точки лежат на разных поверхностях уровня: $M_4(1,0,0)$ – на $x^2+y^2-z=1$; $M_5(0,0,1)$ – на $x^2+y^2-z=-1$ (рис. 5).

г) Вычислить работу вектора $\overline{grad}\, u$ по произвольной кривой, соединяющей точки $M_4(0,0,0)$ и $M_2(1,0,1)$. Тогда

$$A = \int_L du = (x^2+y^2-z)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,0,1)} = 0,$$

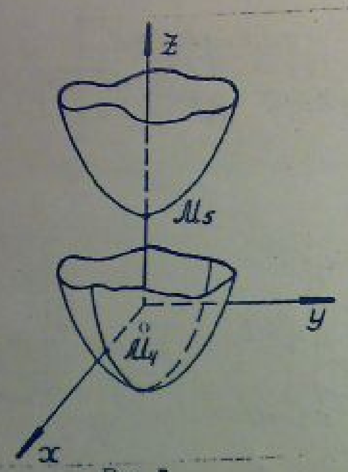

Рис. 5

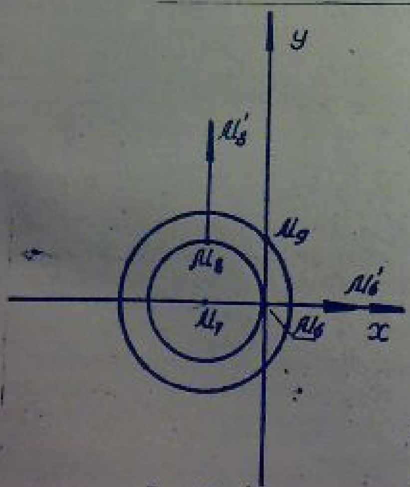

Рис. 6

т.е. разность значений функции $U = f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ будет равна нулю, так как точки лежат на одной поверхности уровня $x^2 + y^2 = z$ (рис. 4).

<u>Задача № 2</u>. Пусть задана скалярная функция $U = x^2 + y^2 + 2x$ в двухмерном пространстве.

а) В каждой точке двухмерного евклидова пространства эта функция будет иметь конечное значение. Множество этих значений образует скалярное поле. Найдем в этом случае кривую уровня, для этого приравняем U константе C

$x^2 + y^2 + 2x = C$ или

$(x+1)^2 + y^2 = C + 1.$

Это уравнение характеризует окружность при $C + 1 \geq 0$ или $C \geq -1$ (рис. 6).

<u>б) Найти вектор</u> $a = \overline{grad}\, U$ и вычислить его значение в точках $M_6(0,0)$ и $M_8(-1,1)$, принадлежащих одной линии уровня $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Построить эти векторы и линию уровня (рис. 6)

$\overline{grad}\, U = (2x+2)\bar{i} + 2y\bar{j};$

$|\overline{grad}\, U| = \sqrt{4(x+1)^2 + 4y^2};$

$\overline{grad}\, U\big|_{M_6} = 2\bar{i}, \overline{grad}\, U\big|_{M_8} = 2\bar{j};$

$\overline{grad}\, U\big|_{M_6} = \overline{M_6 M_6'}, \overline{grad}\, U\big|_{M_8} = \overline{M_8 M_8'}.$

в) Вычислить работу вектора $\overline{grad\, u}$ по произвольной гладкой кривой от точки $M_7(-1,0)$ до точки $M_9(0,1)$.

$$A=\int_L du = u\Big|_{(-1,0)}^{(0,1)} = (x^2+y^2+2x)\Big|_{(-1,0)}^{(0,1)} = 2,$$

т.е. разность значений функции $u=x^2+y^2+2x$ будет отличаться от нуля, так как точки лежат на разных линиях уровня: $M_7(-1,0)$ – на $x^2+y^2+2x=-1$; $M_9(0,1)$ – на $x^2+y^2+2x=1$ (рис. 6).

§ 2. Векторное поле

Пусть D область на плоскости или в пространстве. Если в каждой точке M области D ставится в соответствие некоторый вектор $\bar F(M)$, то области D задается векторное поле. Таким образом, векторное поле определяется с помощью векторной функции $\bar F(M)$.

Следующие физические величины – скорость установившегося течения жидкости, поле магнитной напряженности, силовое поле – образуют векторные поля.

Если векторная функция $\bar F(M)$ не зависит от времени, то векторное поле называется стационарным.

Если положение каждой точки $M(x,y,z)$ относительно евклидовой системы координат определять с помощью радиус-вектора $\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$, то $\bar F(x,y,z)=\bar F(r)$,

$\bar F(x,y,z)=F_x(x,y,z)\bar i + F_y(x,y,z)\bar j + F_z(x,y,z)\bar k$,

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора $\bar F(x,y,z)$ на оси координат.

Проведем в векторном поле линию таким образом, чтобы в каждой точке касательная к линии имела направление, совпадающее с направлением вектора $\bar F(x,y,z)$ в этой точке. Такая линия называется векторной линией (рис. 7). Чтобы найти ее векторное уравнение $r(t)=x(t)\bar i + y(t)\bar j + z(t)\bar k$, где t – параметр, составим дифференциальные уравнения из условия коллинеарности, так как дифференциал вектора $\bar r$ должен быть коллинеарен вектору $\bar F(x,y,z)$. Получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{F_x(x,y,z)}=\frac{dy}{F_y(x,y,z)}=\frac{dz}{F_z(x,y,z)}.$$

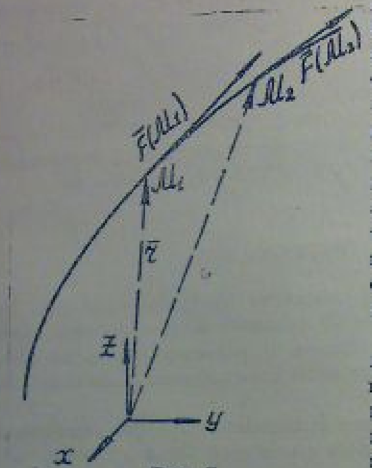

Рис. 7

Рис. 8

Если взять в рассматриваемой области какую-нибудь линию, отличную от векторной, и через каждую ее точку провести векторную линию, то геометрическое множество этих векторных линий даст векторную поверхность. Если взятая линия замкнута, то получим трубчатообразную векторную поверхность, которая называется векторной трубкой (рис. 8).

Выделим в векторном поле область, ограниченную гладкой двусторонней поверхностью S, а направление нормали $\bar n^0$ к замкнутой поверхности, содержащей объем V, - внешнее по отношению к объему, а F_x, F_y, F_z являются непрерывными вместе со своими частными производными.

Рассмотрим

$\Pi = \oiint_S \bar F \bar n^0 \, dS$ - интеграл по поверхности, который называется потоком поля через поверхность.

Тогда по формуле Гаусса-Остроградского

$$\oiint_S \bar F \bar n^0 \, dS = \iiint_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV,$$

где величина $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar F(x,y,z)$ есть дивергенция или расходимость векторного поля.

$$\oint\limits_S \bar F \bar n^o dS = \oint\limits_S F_n\, dS = \iiint\limits_v div \bar F dv,$$

где dS – элемент поверхности; dv – элемент объема;

$$\bar n^o = \cos(n,x)\bar i + \cos(n,y)\bar j + \cos(n,z)\bar k;$$

элементы поверхности координатных плоскостей связаны соотношениями

$$dxdy = \cos\gamma dS, \quad dydz = \cos\alpha dS, \quad dzdx = \cos\beta dS,$$

$$\cos\gamma = \cos(n,z), \quad \cos\alpha = \cos(n,x), \quad \cos\beta = \cos(n,y).$$

При этом $\bar n^o$ берется внешней по отношению к объему, заключенному внутри S (рис. 9).

Если $v = v_1$ – конечный по численному значению объем, и $S = S_1$ – поверхность, ограничивающая объем v_1, взятый вокруг точки $M(x,y,z)$, тогда, исходя из теоремы о среднем для тройного интеграла, получим

$$\iiint\limits_{v_1} div \bar F dv = div \bar F\Big|_{M_1} \cdot v_1,$$

откуда следует

$$\oint\limits_{S_1} F_n dS = div \bar F\Big|_{M_1} \cdot v_1, \quad M_1 \in v_1$$

$$div \bar F\Big|_{M_1} = \frac{\oint\limits_{S} F_n dS}{v_1}.$$

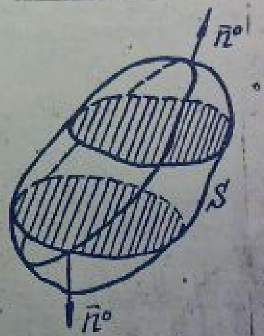

Рис. 9

Будем стягивать объем v_1 в точку $M(x;y;z)$, тогда

$$div \bar F = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\oint\limits_S F_n ds}{v_1}.$$

Расходимость поля в точке $M(x,y,z)$ есть предел отношения потока вектора поля через малую замкнутую поверхность, окружающую произвольную точку $M(x,y,z)$, к объему, ограниченному этой гладкой поверхностью при стягивании v_1 в точку $M(x,y,z)$.

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от расходимости векторного поля.

Если обратимся к интерпретации векторного поля при помощи текущей жидкости, то $div\bar{F}\neq 0$ является мерой появления или уничтожения текущей жидкости, т.е. признаком существования источников $(div\bar{F}>0)$ или стоков $(div\bar{F}<0)$. Значение потока вектора через бесконечно малую поверхность, охватывающую источник (количество жидкости увеличивается) или сток (количество жидкости уменьшается), называется плотностью источников или стоков (мощность потока).

Уравнение $div\bar{F}=0$ в гидродинамике называется уравнением неразрывности несжимаемой жидкости. Векторное поле, удовлетворяющее уравнению $div\bar{F}=0$, называется соленоидальным или трубчатым, т.е.

$$\oint_S F_n\,dS=0$$

по любой замкнутой двусторонней гладкой поверхности, находящейся в объеме V, где $div\bar{F}=0$.

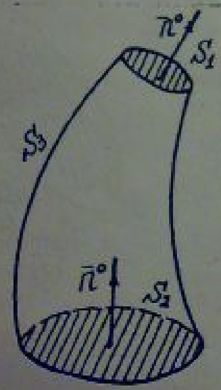

Рис. 10

Рассмотрим случай, когда двусторонняя поверхность является частью векторной трубки, ограниченной двумя поперечными сечениями (рис. 10).

Вследствие того, что $F_n=0$ на боковой поверхности векторной трубки, а вектор $\bar{n}^0$ – совпадающий с нормалью к поперечному сечению S_1 (или S_2) векторной трубки объема V, где S_3 – боковая поверхность, $S=S_1+S_2+S_3$, то

$$\oint_S F_n\,dS=\iint_{S_3}F_n\,dS-\iint_{S_2}F_n\,dS+\iint_{S_1}F_n\,dS=0$$

или

$$\oint_S F_n\,dS=\iint_{S_1}F_n\,dS-\iint_{S_2}F_n\,dS=0.$$

Получим соотношение $\iint_{S_1}F_n\,dS=\iint_{S_2}F_n\,dS$, т.е. величина потока через любое сечение векторной трубки сохраняет свое значение. Эта величина называется напряжением векторной трубки (через каждое сечение векторной трубки протекает одинаковое количество вещества). Величина потока $\iint_{S_2}F_n\,dS$

дает число векторных линий, проходящих через сечение S_2, т.е. это число не меняется вдоль векторной трубки. Отсюда следует, что в соленоидальном поле векторные линии нигде не начинаются, нигде не кончаются, т.е. они могут уходить в бесконечность или быть замкнутыми.

Задача № 3. Пусть задана векторная функция

$$\bar{F}(x,y,z) = xy\bar{i} + y\bar{j} + yz\bar{k},$$

которая в каждой точке трехмерного евклидова пространства дает некоторый вектор, а множество векторов образует векторное поле. Найдем уравнения векторной линии

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{yz}.$$

Получим

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{yz}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z}.$$

Откуда $\ln x C_1 = y$ и $\ln z C_2 = y$.

Векторная линия есть линия пересечения двух поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве $xC_1 = e^y$ и $zC_2 = e^y$. Если возьмем $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$, то линия пересечения будет находиться в плоскости $x = z$.

Вычислим дивергенцию $\bar{F}(x,y,z)$ и определим ее значение в точках $M_1(0,0,2)$, $M_2(1,-1,0)$, $M_3(1,-1/2,0)$, где $div\,\bar{F} = 2y+1$ в точке M_1 $div\,\bar{F} = 1 > 0$ – источник; в точке M_2 $div\,\bar{F} = 0$ – источник и сток отсутствуют; в точке M_3 $div\,\bar{F} = -1 < 0$ – сток.

Возьмем замкнутый объем в трехмерном пространстве, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ и рассмотрим области, где $div\,\bar{F}>0$, $div\,\bar{F}=0$, $div\,\bar{F}<0$ (рис. 11). Знак дивергенции (положительный или отрицательный) будет зависеть от знака функции $2y+1$. Если $2y+1>0$, $-\frac{1}{2}<y\le 1$, то $div\,\bar{F}>0$,

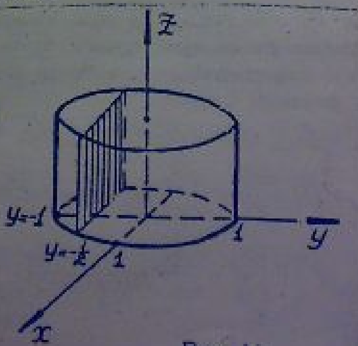

Рис. 11

$$2y+1=0, y=\frac{1}{2}, \text{ то } div\bar{F}=0;$$
$$2y+1<0, -1\le y<\frac{1}{2}, \text{ то } div\bar{F}<0.$$

Следовательно, дивергенция будет сохранять свое значение на сечениях конечного цилиндрического тела (конечного кругового цилиндра), перпендикулярных диаметру основания, лежащему на оси Oy. Так как y принимает значения $-1\le y\le 1$, то наименьшее значение достигается $div\bar{F}=-1$ на прямой, проходящей через точку плоскости xoy $-(0,-1)\parallel Oz$, при этом z изменяется от 0 до 1. Значение $div\bar{F}=0$ получим на сечении тела плоскостью $y=-1/2$. Наибольшее значение $div\bar{F}=3$ получим на прямой, проходящей через точку плоскости xoy $-(0,1)\parallel Oz$, при этом z изменяется от 0 до 1. Рассмотрим поток вектора $\bar{F}(x,y,z)$ через эту замкнутую двустороннюю кусочно-гладкую поверхность S

$$\Pi=\oiint F_n\,dS=\iiint_V(2y+1)\,dv.$$

Перейдем к цилиндрической системе координат, тогда

$$\Pi=\iiint_V(2r\sin\varphi+1)r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2r\sin\varphi+1)r\,dr\int_0^1 dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sin\varphi\frac{2}{3}r^3+\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}d\varphi=\left(-\frac{2}{3}\cos\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

Циркуляция Γ вектора поля $\bar{F}(x,y,z)$ вдоль кусочно-гладкого замкнутого контура L, принадлежащего некоторой гладкой двусторонней поверхности S, равна

$$\Gamma=\oint_L F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=\oint_L F\,d\bar{r}=\oint_L F_\tau\,dl,$$

где F_τ – проекция на касательную к кривой L; dl – дифференциал длины дуги кривой, а F_x, F_y, F_z – проекции $\bar{F}$ являются непрерывными вместе со своими частными производными. По формуле Стокса

$$\Gamma=\oint_L F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial F_x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos(n,z)\right]dS,$$

где $\bar{n}^0$ – нормаль к поверхности S, ограниченной кривой L, выбирается таким образом, чтобы обход по контуру L совершался против часовой стрелки, если смотреть с конца нормали $\bar{n}^0$ по отношению к поверхности S (рис. 12).

Введем $\overline{rot}\,\bar{F}$ (ротор или вихрь), где его проекции соответственно равны следующим значениям:

$$rot_x \bar{F} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z},$$

$$rot_y \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},$$

$$rot_z \bar{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

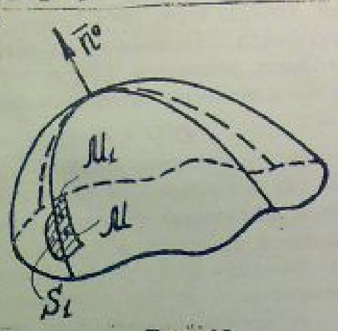

Рис. 12

Тогда

$$\Gamma = \oint_L F_x dx + F_y dy + F_z dz = \iint_S rot_n \bar{F} dS \text{ и } \oint_L F_l\, dl = \iint_S rot_n \bar{F} dS,$$

или в векторной форме

$$\oint_L \bar{F} d\bar{r} = \iint_S \overline{rot}\,\bar{F} \cdot \bar{n}^0 dS.$$

Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ на поверхности S и выделим ограниченный кусок поверхности S_1, содержащий эту точку. Тогда интеграл $\iint_S rot_n \bar{F} dS$, исходя из теоремы о среднем, будет равен

$$rot_n \bar{F}\Big|_{M_1(x_1,y_1,z_1)} \cdot S_1, \qquad \text{где } M_1 \in S_1.$$

При подстановке в формулу для циркуляции получим

$$\oint_L F_l\, dl = rot_n \bar{F}\Big|_{M_1} \cdot S_1.$$

Отсюда

$$rot_n \bar{F}\Big|_{M_1} = \frac{\oint_L F_l\, dl}{S_1}.$$

Будем стягивать кусок поверхности площади S_1 в точку $M(x,y,z)$. Тогда

$$rot_n \bar{F} = \lim_{(S_1)\to M} \frac{\oint_L F_l\, dl}{S_1}.$$

Проекция ротора вектора $F(x,y,z)$ на произвольное направление $\bar{n}^0$ в точке $M(x,y,z)$ есть предел отношения циркуляции вдоль замкнутой кривой, окружающей точку $M(x,y,z)$, к площади поверхности, ограниченной этой кривой при условии, что поверхность стягивается в данную точку.

Если положить $\overline{rot}\,\bar{F}=0$, то $\oint_L F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=0$, что дает условие существования полного дифференциала

$$dU=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz.$$

В этом случае вектор $\bar{F}(x,y,z)$ образует потенциальное поле (безвихревое), а проекции вектора есть частные производные некоторой функции, т.е. вектор $\bar{F}(x,y,z)$ – градиент некоторой функции $U=f(x,y,z)$.

Функция $U=f(x,y,z)$ называется потенциальной функцией векторного поля, или потенциалом.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру равна нулю. При этом контур заключает односвязную область, во всех точках которой F_x, F_y, F_z являются непрерывными вместе со своими частными производными. С точки зрения физики, это означает, что в потоке отсутствуют замкнутые кривые движения частиц вещества (нет водоворотов), $\overline{rot}\,\overline{grad}\,U=0$.

Если взять ротор произвольного вектора $\bar{F}(x,y,z)$, то

$$div\ \overline{rot}\,\bar{F}=0.$$

Таким образом, каждое трубчатое поле – поле ротора произвольного вектора $\bar{F}(x,y,z)$, а вектор $\bar{F}(x,y,z)$ называется вектором-потенциалом. Векторное поле, являющееся одновременно соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.

Если, исходя из условий задания вектора $\bar{F}$, можно получить $\overline{rot}\,\bar{F}=0$, то $\bar{F}=\overline{grad}\,U$, а если положить $div\,grad\,U=0$, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Такая функция $U=f(x,y,z)$ называется гармонической.

Для ротора $\bar{F}(x,y,z)$ можно составить условную запись, пользуясь символами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$,

$$\overline{rot}\,\bar{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Задача № 4. Вычислим циркуляцию вектора $\bar F(x,y,z)=xy\bar i+y\bar j+yz^2\bar k$ по кривой L, заданной пересечением поверхностей $y=1$, $y=z^2$, $x=0$ в трехмерном евклидовом пространстве, где L – замкнутая кусочно-гладкая кривая. Направление выбирается против часовой стрелки, а нормаль – к части плоскости zOy, которая коллинеарна направлению вектора, лежащего на оси Ox (рис. 13). Циркуляцию получим

$$\Gamma=\oint xy\,dx+y\,dy+yz^2dz=$$

$$=\oint_{BOAB} y\,dy+yz^2dz=\int_{-1}^{1}z^2dz+\int_{1}^{-1}(z^2 2z+z^4)dz=\frac{z^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{2}z^4+\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{1}^{-1}=\frac{4}{15}.$$

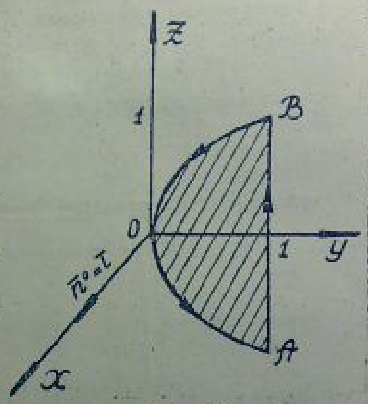

Рис. 13

С другой стороны,

$$\overline{rot}\,\bar F=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & y & yz^2\end{vmatrix}=z^2\bar i-x\bar k.$$

Откуда

$$\Gamma=\iint_S rot_n\bar F\,ds=\iint_S\left[z^2\cos(n,x)-x\cos(n,z)\right]ds=\iint_S z^2dy\,dz-$$

$$-x\,dx\,dy=\iint z^2dy\,dz=\int_{-1}^{1}z^2dz\int_{z^2}^{1}dy=\int_{-1}^{1}z^2(1-z^2)dz=$$

$$=\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{15};$$

$\iint_S x\,dx\,dy=0$, так как проекция области, расположенной в плоскости zOy на плоскость xOy, есть отрезок оси Oy от точки $(0,0)$ до $(0,1)$, т.е. площадь равна нулю.

§ 3. Применение оператора Гамильтона при записи основных понятий векторного анализа

Введем символический вектор ∇ ("набла-вектор").

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Тогда можно представить

1. $$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)u = \bar{\nabla} u -$$

произведение "вектора" $\bar{\nabla}$ на скалярную функцию u;

2. $$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(F_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_y) + \frac{\partial}{\partial z}(F_z) = \bar{\nabla}\bar{F} -$$

скалярное произведение "вектора" $\bar{\nabla}$ на вектор $\bar{F}$;

3. $$\overline{\operatorname{rot}} \bar{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{\nabla} \times \bar{F} -$$

векторное произведение "вектора" $\bar{\nabla}$ на вектор $\bar{F}(x,y,z)$.

Находим некоторые значения, пользуясь оператором.

а) $\operatorname{div} \overline{\operatorname{rot}} \bar{F} = 0$, так как

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{rot}} \bar{F} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \times \bar{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0.$$

Символически "определитель", у которого две строки совпадают, равен нулю. Так как

$$\operatorname{div} \overline{\operatorname{rot}} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} = 0,$$

то каждое слагаемое равно нулю.

б) $\overline{\operatorname{rot}}\, \overline{\operatorname{grad} u} = 0$, $\overline{\operatorname{rot}\, \operatorname{grad} u} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} u) = (\bar{\nabla} \times \bar{\nabla})u = 0$,

т.е. векторное произведение равных векторов равно нулю.
Из формулы для ротора следует

$$\overline{rot\,grad}\,u = \overline{rot}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\bar{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\bar{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\bar{k} = 0,$$

где в скобках – разность одноименных смешанных производных.

Задача № 5. Представим $div\,\overline{grad}\,u$ с помощью "набла-вектора"

$$div\,\overline{grad}\,u = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}u) = \bar{\nabla}^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u -$$

оператор Лапласа.

§ 4. Примерный вариант домашнего задания

В домашнем задании, состоящем из двух типов, требуется найти величины, характеризующие по заданной скалярной функции или заданному вектору скалярное или векторное поля.

1. Дана скалярная функция $u = x^2 + y^2 + z^2$ в трехмерном евклидовом пространстве.

а) Найти поверхности уровня.

б) Найти вектор $\overline{grad}\,u$, вычислить значение этого вектора в точке $M_0(2,1,1)$, построить поверхность уровня и градиент для данной точки.

в) Вычислить работу вектора $\overline{grad}\,u$ по прямой, параллельной оси Oz, от точки $M_1(1,1,-1)$ до $M_2(1,1,2)$.

г) Найти уравнения векторной линии поля градиента, проходящей через точку $M_0(2,1,1)$.

Решение

а) Поверхность уровня удовлетворяет соотношению $u = const$, $x^2 + y^2 + z^2 = C$ $(C > 0)$ – сфера, а поверхности уровня – это семейство вложенных друг в друга сфер.

б) Найдем вектор $\overline{grad}\,u$, для этого возьмем частные производные от $u = f(x,y,z)$ по x, y, z и умножим соответственно на $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, так как функция является непрерывной вместе со своими частными производными

$\overline{grad}\,U = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$.

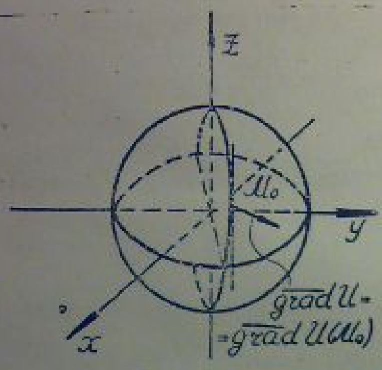

Рис. 14

Вычисляем значение $\overline{grad}\,U$ в точке $M_0(2,1,1)$

$$\overline{grad}\,U\Big|_{M_0} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Поверхность уровня для точки M_0 находится из условия $U = C$, т.е. $x_0^2+y_0^2+z_0^2 = 4+1+1=6$ и $x^2+y^2+z^2=6$. Выполним рис. 14.

в) Вычисляем работу вектора $\overline{grad}\,U$ (рис. 15) по прямой, параллельной оси Oz от точки $M_1(1,1,-1)$ до $M_2(1,1,2)$.

$$A = \int_{M_1M_2} \overline{grad}\,U\,d\bar{r} = \int_{M_1M_2} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = \int_{M_1M_2} dU = U(M_2) - U(M_1) = (x^2+y^2+z^2)\Big|_{(1,1,-1)}^{(1,1,2)} = 6-3=3.$$

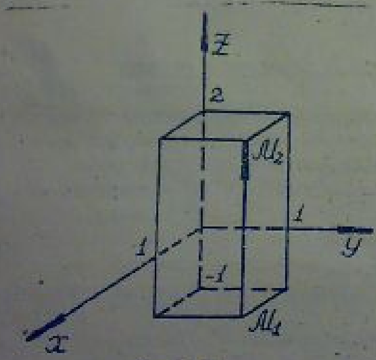

Рис. 15

г) Находим уравнения векторной линии поля градиента, проходящей через точку $M_0(2,1,1)$.

Дифференциальные уравнения векторной линии имеют вид

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z},$$

т.е. линия пересечения поверхностей $x = C_1 y$ и $x = C_2 z$. Пользуясь значением координат точки $M_0(2,1,1)$, найдем значения констант C_1 и C_2. Окончательно уравнения линии примут вид $x=2y$ и $x=2z$, т.е. линия пересечения – прямая.

П. Дана векторная функция $\bar F = xy\bar i + x^2\bar j + z^2\bar k$ в трехмерном евклидовом пространстве.

а) Найти векторные линии.

б) Вычислить значение $\operatorname{div}\bar F$ в точке $M_0(-1,0,1)$.

в) Найти поток вектора $\bar F(x,y,z)$ через замкнутую поверхность, образованную пересекающимися плоскостями

$x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1.$

г) Вычислить ротор вектора $\bar F(x,y,z)$.

д) Вычислить циркуляцию вектора $\bar F(x,y,z)$ по замкнутой ломаной линии в плоскости xOy, заданной пересекающимися прямыми $x+y=1,\ x=0,\ y=0$, с помощью криволинейного интеграла и используя формулу Стокса.

Решение

а) Векторные линии находятся при решении системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{z^2},$$

где $\dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dy}{x^2}$, $x\,dx = y\,dy$, $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{a}{2}$, $x^2+y^2=C_1\ (C_1\neq 0)$;

$$\frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{z^2},\quad \frac{dy}{C_1-y^2} = \frac{dz}{z^2},\quad \pm\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{\pm\sqrt{C_1}+x}{\pm\sqrt{C_1}-x}\right| = -\frac{1}{z} + C_2.$$

Окончательно два уравнения примут вид

$$x^2+y^2=C_1,\quad \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|\frac{y}{\sqrt{C_1}-x}\right| = -\frac{1}{z} + C_2,$$

что определяет некоторую линию в пространстве. Придавая C_1 и C_2 различные численные значения, получим семейство линий (линий тока), заполняющих все пространство.

б) Вычислим

$$\operatorname{div}\bar F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = y + 0 + 2z = y + 2z.$$

В точке $M_0(-1,0,1)$ $\operatorname{div}\bar F(M_0) = 2 > 0$ – источник.

в) Находим поток вектора $\bar F(x,y,z)$ через поверхность, заданную пересекающимися плоскостями $x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (рис. 16).

$$\Pi = \oint\!\!\oint \bar F\bar n^0\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar F\,dv = \iiint_V (y+2z)\,dv = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^1 (y+2z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} (yz+z^2)\Big|_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^1 \frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \left[-\frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

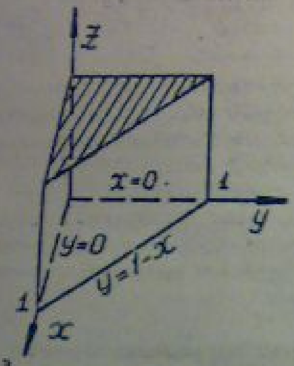

Рис. 16

г) Вычисляем ротор вектора $\bar F(x,y,z)$ по формуле

$$\overline{\operatorname{rot}}\,\bar F = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = x\bar k.$$

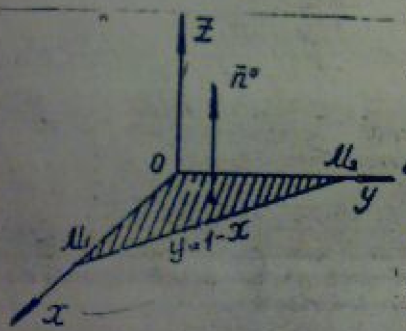

Рис. 17

д) Вычисляем циркуляцию вектора $\bar F(x,y,z)$ по линии в плоскости xOy, заданной отрезками пересекающихся прямых $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, с помощью криволинейного интеграла (рис. 17)

$$\Gamma = \oint xy\,dx + x^2dy + z^2dz =$$

$$= \int_{OM_1M_2O} xy\,dx + x^2dy =$$

$$= \int_1^0 [x(1-x) - x^2]\,dx =$$

$$= \int_1^0 (x - 2x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Вычисляем циркуляцию с помощью формулы Стокса.

Выбираем направление $\bar n^0$ таким образом, чтобы перемещение по L было против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора n^0 ($\bar n^0 \parallel \bar k$)

$$\Gamma = \oint_L \bar F\,d\bar r = \iint_S \overline{\operatorname{rot}}\,\bar F\cdot\bar n^0\,dS = \iint_S x\cos(n,z)\,dS = \iint_S x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Решение рассмотренных задач было возможным, так как функции U, F_x, F_y, F_z – непрерывны вместе со своими частными производными. Этому условию удовлетворяют координаты градиента и ротора, а кривая L, поверхность S – кусочно-гладкие.

Домашнее задание выполняется по следующим вариантам:

1-я задача: точка M_0 для пунктов б), г); точки M_1 и M_2 для пункта в).

2-я задача: точка M_0 для пункта б), поверхность S для пункта в), кривая L для пункта д).

Задача 1

Дан потенциал $U=f(x,y,z)$ векторного поля в пространстве (четные варианты) или потенциал $U=f(x,y)$ плоского векторного поля (нечетные варианты).

а) Найти поверхности или линии (уровня) равного потенциала.

б) По заданному потенциалу найти векторное поле; вычислить градиент в точке M_0; построить для точки M_0 поверхность или линию (уровня) равного потенциала и градиент.

в) Вычислить работу градиента от точки M_1 до M_2.

г) Найти уравнения векторной линии поля градиента, проходящей через точку M_0.

Условия для задачи 1

№№	$U=f(x,y,z)\,[f(x,y)]$	M_0	M_1	M_2
1	x^2-2y	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0,5)$
2	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}$	$(2,2,2)$	$(1,0,0)$	$(0,1,0)$
3	$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}$	$(4,5)$	$(1,0)$	$(0,1)$
4	x^2+y^2+z	$(1,1,0)$	$(0,1,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$
5	x^2+y^2	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(0,0)$	$(1,2)$